סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס מתמטיקה בדידה. הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה לחצו כאן.

את הקורס בנה מר טל פלדמן, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר www.gool.co.il.

אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

גול זה בול. בשבילך!

תוכן

תרגילים בנושא קבוצות

1) לכל אחת מהטענות הבאות, אם הטענה נכונה אז ציין רק שהטענה נכונה ואם הטענה אינה נכונה אז ציין שהטענה לא נכונה ותן דוגמה נגדית והראה כי הדוגמה שנתת באמת מהווה דוגמה נגדית. ערך רב יותר יש לדוגמה מינימלית. (בדוק האם בדוגמה שנתת יש פרטים מיותרים והסר אותם).
את הטענות הנכונות מבין 10-17 נסה להוכיח. רצוי להוכיח גם את טענה 9) בה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה

א) אם $x \notin A$ אז $x \notin A \cup B$.

ב) אם $x \notin A \cup B$ אז $x \notin A$

ג) אם $x \notin A$ אז $x \notin A \cap B$.

ד) אם $x \notin A \cap B$ אז $x \notin A$

ה) אם $x \notin A$ אז $x \notin A - B$

ו) אם $x \notin A - B$ אז $x \notin A$

ז) אם $x \in B$ אז $x \notin A - B$.

ח) אם $x \notin A - B$ אז $x \in B$

ט) $A \subseteq B \cap C \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B \wedge A \subseteq C)$

י) $A \subseteq B \cup C \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B \vee A \subseteq C)$

יא) אם $A = A \cup B$ אז $A \subseteq B$

יב) אם $A = A \cup B$ אז $B \subseteq A$

יג) אם $A = A \cap B$ אז $A \subseteq B$

יד) אם $A = A \cap B$ אז $B \subseteq A$

טו) אם $A \subseteq B$ אז $A = A \cup B$

טז) אם $B \subseteq A$ אז $A = A \cup B$ יז)

יז) אם $A \subseteq B$ אז $A = A \cap B$

יח) אם $B \subseteq A$ אז $A = A \cap B$

יט) $x \notin A - B \Leftrightarrow x \notin A$

כ) $x \notin A - B \Leftrightarrow x \in B$

כא) השלם $x \notin A - B \Leftrightarrow$ ________________

2) יהיו A, B, C קבוצות הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

א) אם $A = A - B$ אז $B = \varnothing$.

ב) אם $A = A - B$ אז $A \cap B = \varnothing$.

ג) אם $A = A \cup B$ אז $A \cap B = B$.

ד) אם $B = A \cup B$ אז $A \cap B = B$.

ה) אם $A \cap B = A$ אז $A = A \cup B$.

ו) אם $A \cap B = B$ אז $A = A \cup B$.

ז) אם $A \cup B = A \cup C$ וגם $A \cap B = A \cap C$ אז $B = C$. (מבחן סמסטר קיץ תשס"ח , מועד ב')

ח) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$

ט) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$

י) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

יא) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

יב) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

יג) $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

יד) א. $A \cap B \cap C \subseteq A \oplus B \oplus C$

ב. $A \oplus B \oplus C \subseteq A \cap B \cap C$

3) הוכח כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה.

במקום הטענה אם α אז β מוכיחים אם $\neg\beta$ אז $\neg\alpha$.

ויש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

א) אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$ אז $A\cap C=\varnothing$

ב) אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$ אז $A\subseteq B$

ג) אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$ אז $(A-C)\cap B=\varnothing$

ד) אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$ אז $B\subseteq A$

ה) אם $A\subseteq A\Delta B$ וגם $B-C=B\Delta C$. אז $A\cap C=\varnothing$.

ו) אם $A\subseteq A\oplus B$ וגם $B-C\subseteq B\oplus C$ אז $A\cap C=\varnothing$

ועכשיו קצת על קבוצת חזקה.

4) הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

א) $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$

ב) $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$

ג) $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

ד) $P(A)\cap A\neq\varnothing$

ה) $P(A)\cap A=\varnothing$.

ו) אם $\{A\}\subseteq P(B)$ אז $P(A)\subseteq P(B)$

את שתי הטענות הבאות הוכח בדרך השלילה

ז) אם $P(A)\subseteq P(A-B)$ אז $A\cap B=\varnothing$

ח) אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$ (שאלה קשה).

5) משהו גם על מכפלות קרטזיות. (נצטרך את זה גם ליחסים)

א) $(A=B)\Leftrightarrow(A\times A=B\times B)$

ב) $((B=\varnothing)\vee(A=\varnothing)\vee(A=B))\Leftrightarrow(A\times B=B\times A)$

ג) הוכח כי לכל 4 קבוצות A,B,C,D מתקיים: $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

ד) אם $((A\times A)\cup(B\times B)=(C\times C))$ אז $(((B\subseteq A)\vee(A\subseteq B))\wedge(A\cup B\subseteq C))$

ה) הוכח כי לכל 4 קבוצות A,B,C,D מתקיים: $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$.

6) הוכיחו או הפריכו: תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S\subseteq A\times B$ אז קיימות $C\subseteq A$ ו-$D\subseteq B$ כך ש-$S=C\times D$

7) הוכיחו או הפריכו: לכל שתי קבוצות A,B מתקיים: $\overline{A\oplus B}=\overline{A}\oplus\overline{B}$

8) הוכיחו או הפריכו: קיימות שלוש קבוצות A,B,C שלושתן לא ריקות ושונות זו מזו כך ש-$A\cup(B-C)\subseteq A\cap(B-C)$

9) תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן. נתון $P(A)-P(B)=P(B)-\{\varnothing\}$ הוכח כי $B-A=B$

10) הוכח כי אם $A\Delta B\subseteq A\Delta C$ אז $A\cap C\subseteq B$

11)הוכח או הפרך: קיימות שתי קבוצות A,B כך ש-$|A\times B|=24$ וגם $|A\cap B|=5$

12) תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן. נתון $A\cap B=\varnothing$ הוכח כי $(A\Delta C)\cup(B\Delta C)=A\cup B\cup C$

13) הוכח או הפרך: לכל שלוש קבוצות A,B,C $A\times(B\oplus C)=(A\times B)\oplus(A\times C)$

14) תן דוגמא לקבוצה A שמקיימת $A\cap P(A)\cap P(P(A))\neq\varnothing$

15) לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים: $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus(C\setminus B))$

תרגילים בנושא עוצמות

1) הוכח את השקילויות הבאות באמצעות פונקציות חח"ע ועל בין הקבוצות. (פונקציית שקילות.)

א. $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$ ב. $\mathbb{N}\times\{0,1\}\sim\mathbb{N}$ ג. $(-1,1)\sim\mathbb{R}$ ד. $\mathbb{N}\times[0,1)\sim[0,\infty)$

ה. $[1,3)\cup[4,8]\sim[0,1]$ ו. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\sim\{0,1\}^{\mathbb{N}_{even}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}_{odd}}$ ז. $(0,1]\sim(0,1)$

2) הוכח כי $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}\sim\{(x,y)|x^2+y^2=4\}$

3) הוכח (ישירות ע"י מציאת פונקציה מתאימה) כי הקטע $(0,2010)$ שקול ל-$(0,\infty)$ ורישמו עוצמתם.

4) הוכח כי אם $A\sim B$ וגם $C\sim D$ וגם $A\cap C=\varnothing$ וגם $B\cap D=\varnothing$ אז $(A\cup C)\sim(B\cup D)$

5) הוכח כי אם $A\sim B\,,C\sim D$ אז $A\times C\sim B\times D$

6) הוכח כי $\aleph_0+n=\aleph_0$ כאשר $n\in\mathbb{N}$.

7) הוכח את הטענה הבאה: הקבוצה $A=\mathbb{Q}$ קבוצת המספרים הרציונלים

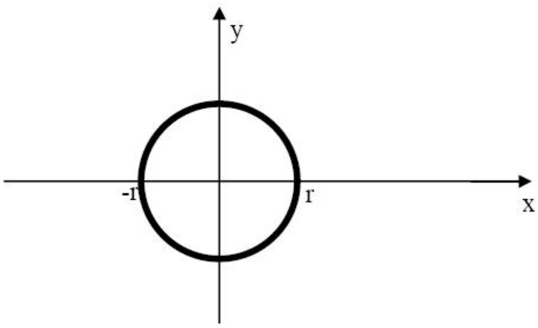
ו- $B=\{f(x)=ax^2+bx+c : a,b,c\in\mathbb{Q}\}$ הן שוות עוצמה.

8) מעגל במישור ברדיוס r ($r>0$ ממשי) שמרכזו בראשית הצירים הוא קבוצת כל הנקודות (x,y)

במישור המקיימות את המשוואה $x^2+y^2=r^2$ כמודגם ב

הוכיחו שלכל $r>0$ עוצמת מעגל ברדיוס r

שמרכזו בראשית הצירים היא $\aleph$



9) הוכח או הפרך: תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן. אם $A\oplus B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ וגם $A\cap B$ היא

קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ אז $A\cup B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$.

10) תהי $A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\forall n\in\mathbb{N}\left(x<\frac{1}{n}\right)\wedge\exists n\in\mathbb{N}\left(x>-\frac{1}{n}\right)\right\}$ מה עוצמת A?

11) תהי $A=\{(a,b)|a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R},a<b\}$ כלומר A היא קבוצת כל הקטעים הפתוחים ב- $\mathbb{R}$ מהיא

עוצמת A?

הוכיחו טענתכם.

12) נסמן ע"י $\mathbb{N}$ את קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ וב- $\mathbb{R}^+$ את הממשיים החיוביים

א. מה העוצמה של הקבוצה: $A_4=\left(a\in\mathbb{R}\middle|a^4\in\mathbb{N}\right)$? למשל $1,\sqrt{5},2,\sqrt[4]{7}\in A_4$

ב. מה העוצמה של $A=\left(a\in\mathbb{R}^+\middle|\exists k\in\mathbb{N},a^k\in\mathbb{N}\right)$? למשל $1,\sqrt{5},2,\sqrt[4]{7},\sqrt[100]{3},\sqrt[3]{4}\in A$

13) נגדיר $P_2(\mathbb{N})=\{A\subseteq\mathbb{N}\,\|A|=2\}$ כלומר $P_2(\mathbb{N})$ היא קבוצת כל התת קבוצות בנות שני אברים של טבעיים. מהי עוצמת $P_2(\mathbb{N})$ הוכיחו טענתכם.

14) נגדיר יחס S מעל $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ באופן הבא: $(x_1x_2)S(y_1y_2)\Leftrightarrow\lfloor x_1\rfloor=\lfloor y_1\rfloor$. S יחס שקילות.

(אין צורך להוכיח) הוכח כי קבוצת המנה $(\mathbb{R}\times\mathbb{R})/S$ היא מעוצמה $\aleph_0$.

15) הוכח או הפרך: לכל קבוצה A מתקיים: $A\times\mathbb{N}\sim A\times(\mathbb{N}-\{1\})$

16) הוכח כי עוצמת הקבוצה $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n,n+1)=(1,2)\cup(2,3)\cup(3,4)\cup\cdots$ היא $\aleph$.

17) תהי A קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ ויהי E יחס שקילות מעל A הוכח כי $|E|=\aleph_0$

18) הוכח או הפרך את הטענה הבאה: לכל זוג קבוצות A,B מתקיים: $(A\times B)^C\sim(A^C\times B)\cup(A\times B^C)$

19) פונקצית הסינוס $\mathbf{sin}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא פונקציה מחזורית בעלת מחזור של 2π. כלומר $\mathbf{sin}(x+2\pi)=\mathbf{sin}(x)$

לכל $x\in\mathbb{R}$. עבור $0\le x\le 2\pi$ מתקיים: $\mathbf{sin}\,x=0\Leftrightarrow x\in\{0,\pi,2\pi\}$

מצא את עוצמת הקבוצה $0_{\mathbf{sin}}=\{x\in\mathbb{R}|\mathbf{sin}\,x=0\}$ הוכח טענותיך.

20) האם קיימת קבוצה A כך ש- $|P(A)|=\aleph_0$? הוכח טענותיך.

21) תהיינה k_1,k_2 עוצמות ויהיו A,B קבוצות כך ש- $|A|=k_1,|B|=k_2$. נגדיר פעולת הפרש בין עוצמות באופן הבא: $k_1-k_2=|A-B|$. פעולה זו אינה מוגדרת היטב, כלומר תוצאות של ההפרש משתנות בהתאם לקבוצה ולא בהתאם למחלקה. הציגו 2 דוגמאות לקבוצות שעוצמתן $\aleph_0$ אך עוצמת ההפרש שונה בכל אחת מהדוגמאות.

תרגילים בקומבינטוריקה בסיסית

1) בכמה אופנים ניתן לסדר 10 אנשים בשורה כך ש-

א. ללא הגבלה.

ב. אבי ובני סמוכים.

ג. אבי, בני וגדי סמוכים.

ד. אבי ובני לא סמוכים.

ה. אבי ובני סמוכים וגם גדי ודני סמוכים.

ו. אבי ובני סמוכים וגדי ודני לא סמוכים.

2) בכיתה בה יש 10 בנים ו-15 בנות יש להרכיב נבחרת כדורסל בה יש לפחות 2 בנים ולפחות 2 בנות בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

3) בכמה אופנים שונים ניתן להניח 8 צריחים על לוח $\mathbf{8\times 8}$ בלי שאף צריח יאיים על חברו כך ש-

א. כל הצריחים הם לבנים.

ב. שלושה צריחים הם לבנים וחמישה הם שחורים.

ג. הצריחים נלקחים מתוך שקית ובה מלאי בלתי מוגבל של צריחים לבנים ומלאי בלתי מוגבל של צריחים שחורים.

4) בכמה מספרים 6 ספרתיים מופיעה הספרה

א. 0 פעם אחת בדיוק.

ב. 0 פעם אחת לפחות.

ג. 7 פעם אחת לפחות.

ד. 7 פעם אחת בדיוק. יש לזכור שמספר לא יכול להתחיל בספרה 0.

5) א. יהי $\boldsymbol{n}$ טבעי בכמה תת קבוצות של $\{1,2,3,\cdots 2n\}$ יש אי זוגי אחד לפחות?

ב. בכמה תת קבוצות של $\{1,2,3,\cdots 2n\}$ יש לפחות $n+1$ איברים.

6) בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 10 לימונדות זהות 1 כוס קולה ו-1 כוס קינלי ל-4 תלמידים צמאים כך שכל תלמיד מקבל לפחות משקה אחד והקולה והקינלי ניתנים לתמידים שונים?

7) בכמה דרכים ניתן לחלק 400 כדורים זהים ל-3 תאים כך ש-

א. יש תא ובו יותר מ-200 כדורים.

ב. בכל תא מספר זוגי של כדורים.

ג. בשני תאים מתוך השלוש מספר אי זוגי של כדורים ובתא אחד מספר זוגי של כדורים.

8) 7 אנשים נכנסים למעלית בבניין בן 13 קומות בכמה אופנים הם יכולים ללחוץ על כפתורי המעלית כך ש-

א. המעלית תעצור בקומה החמישית? (יתכן ותמשיך הלאה משם)

ב. המעלית תעצור בקומה החמישית לכל היותר.

ג. המעלית תגיע לפחות עד הקומה החמישית.

ד. המעלית תעצור בקומה החמישית. (ולא תמשיך משם הלאה)

9) בכמה דרכים ניתן לחלק n כדורים לבנים זהים ו-n כדורים צבעוניים (שונים) ל-$2n$ כך שבכל תא יהיה

א. לכל היותר כדור אחד.

ב. לכל היותר כדור לבן אחד ואין מגבלה על מספר הצבעוניים.

ג. לכל היותר כדור צבעוני אחד ואין הגבלה על מסםר הלבנים.

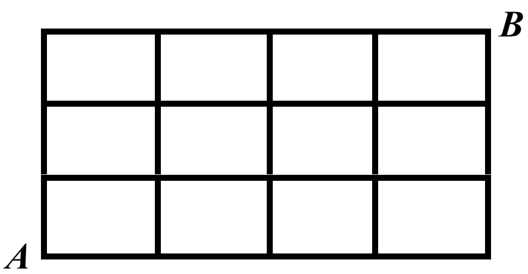
ד. מספר שווה של לבנים וצבעוניים.

10) במלבן בן k שורות ו-m עמודות יש לסמן × או ○ בכל משבצת.

א. הראו כי יש $\left(2^m-1\right)^k$ דרכים לעשות זאת כך שבכל שורה יופיע × אחד לפחות.

ב. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת כך שיופיע ○ אחד לפחות בכל עמודה.

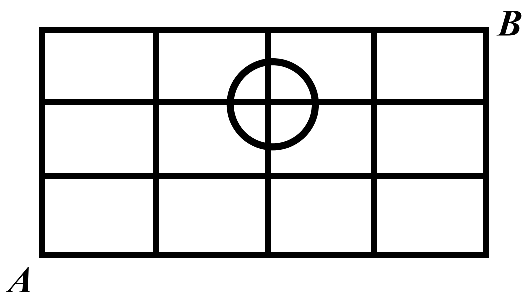
ג. הסיקו כי $2^{mk}\le\left(2^m-1\right)^k+\left(2^k-1\right)^m$



11) חרגול נמצא בנקודה A בשריג המתואר להלן. בכל שלב יכול החרגול להתקדם צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה.

א. בכמה אופנים שונים יכול החרגול להגיע מנקודה A לנקודה B?

ב. בכמה אופנים הוא יכול לעשות זאת מבלי לעבור דרך נקודה המסומנת להלן?



12) א. בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 12 אנשים לשלושה זוגות ושתי שלשות?

ב. כמו א. אך בנוסף דני ודנה לא נמצאים באותה קבוצה.

13) כמה פתרונות בשלמים אי שליליים יש לכל אחת מהמשוואות הבאות?

א. $x_1 + x_2 + \cdots x_7 = 20$

ב. $x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 14$

ג. $(x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6) = 18$

14) בכמה דרכים ניתן לבחור ועדה בת n אנשים מתוך n זוגות נשואים כך ש-

א. בועדה לא ישתתף אף זוג נשוי.

ב. מספר הגברים יהיה שווה למספר הנשים.

ג. מספר הגברים יהיה קטן ממש ממספר הנשים.

15) מצאו בכמה פונקציות $f:\{1,2,3,...,3n-1,3n\} \to \{1,2,3,...,n-1,n\}$ מקיימות את התנאי הבא: לכל אבר בתמונה יש בדיוק 3 מקורות.

16) מה מספר הדרכים לפזר 50 כדורים אדומים ו 20 כדורים כחולים ל 10 תאים, כך שבכל תא מספר הכדורים האדומים יהיה לפחות כמספר הכדורים הכחולים?

17) בכמה דרכים ניתן לחלק קבוצה בגודל $2n$ לקבוצה בגודל n ולזוגות. (ניתן להניח כי n זוגי)

18) בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה 8 פילים שונים, 2 שועלים זהים ושתי תרנגולות זהות, כך שהפילים מסודרים משמאל לימין על פי משקלם בסדר עולה, ואף שועל לא יהיה צמוד לתרנגולת?

19) בכמה דרכים ניתן לחלק 100 כדורים לבנים ו-50 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ל-250 תאים באופן שיתקיימו שני התנאים הבאים: יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור לבן אחד, וכמו-כן יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד?

20) בכמה דרכים ניתן לסדר n גברים ו- n נשים במעגל כך שבני אותו מין לא ישבו זה לצד זה? כנ"ל לגבי שורה.

21) יש לבחור קבוצה של ששה ילדים מבין תלמידי כיתות א1 ו-א2, באופן ששלושה מהם יהיו מ-א1 ושלושה מ-א2. מספר הבנים בקבוצה צריך להיות שווה למספר הבנות בקבוצה (3 ו-3). ב-א1 יש 10 בנים ו-15 בנות וב-א2 יש 15 בנים ו-10 בנות. בכמה אופנים ניתן לבחור את הקבוצה?

22) בכמה קבוצות של n כדורים ב- 10 צבעים יש לפחות כדור אחד מכל צבע?

23) כמה פונקציות $f:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ ($n\ge 1$) מקיימות את התנאי $f(k)\ne f(k+1)$ לכל $1\le k\le n-1$?

24) כמה פונקציות $\boldsymbol{f:\{1,2,3,\cdots,n\}\to\{1,2,3,\cdots,n\}}$ חח"ע ועל יש המקיימות $\boldsymbol{f(k)-k}$ זוגי לכל $\boldsymbol{k}\in\{\boldsymbol{1,2,3,\cdots,n}\}$

25) כמה סדרות בינריות באורך $\boldsymbol{n}$ יש המורכבות מ- $\boldsymbol{k}$ אחדים ו- $\boldsymbol{n-k}$ אפסים שאין בהם שני אחדים רצופים?

26) בכמה דרכים ניתן לחלק 60 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ו-90 כדורים לבנים זהים ל-100 תאים כך שיתקיימו שני התנאים הבאים גם יחד. יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד וכמו כן בכל תא יהיו לכל היותר 50 כדורים לבנים.

27) בכמה דרכים ניתן לחלק 4 בננות, 2 תפוזים, ו-4 תפוחים ל-10 אנשים כך שכל אחד יקבל בדיוק פרי אחד ? שימו לב שפירות מאותו סוג נחשבים זהים.

28) בכמה דרכים ניתן לבנות שורה מ- $k\ge 0$ כדורים לבנים זהים ו- $m\ge 0$ כדורים צבעוניים שונים. (ושונים מלבן)?

תרגילים בנושא רקורסיה

1) לכל n שלם אי-שלילי נגדיר את a_n להיות מספר הסדרות היורדות הלא ריקות, שמורכבות ממספרים טבעיים בין 1 ל n, כך שההפרש בין כל שני מספרים עוקבים בסדרה הוא לפחות 3. כתבו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל a_n.

דוגמאות:

- הסדרה (12,9,5,1) נספרת בחישוב של a_{14}, מכיוון שהיא יורדת, כל הספרות שבה הן בין 1 ל 14, וההפרשים בין כל שתי ספרות עוקבות בסדרה הם 3 או יותר.
- הסדרה (14) נספרת בחישוב של a_{14}, מכיוון שהיא יורדת, כל הספרות שבה הן בין 1 ל 14, וההפרשים בין כל שתי ספרות עוקבות בסדרה הם 3 או יותר (בגלל שאין ספרות עוקבות).
- הסדרה (12,9,7,1) אינה נספרת בחישוב של a_{14}, מכיוון שההפרש בין הספרה השנייה והשלישית בסדרה הוא 2.

2) א) מצא נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור מספר האפשרויות לחלק קבוצה בת n אנשים לזוגות ולבודדים.
ב) מצאי נוסחת נסיגה ותנאי התחלה למספר הדרכים לחלק קבוצה של n אנשים לזוגות ולשלשות, כאשר הסדר בין הזוגות והשלשות ובתוך הזוגות והשלשות איננו משנה.

3) בחפיסת קלפי טאקי יש מספר לא מוגבל של קלפים בצבעים צהוב, אדום, כחול וירוק, ואיננו מבחינים בין קלפים שונים מאותו צבע. יהי a_n מספר ערימות קלפי טאקי בגודל n שבהם מעל קלף אדום או כחול אסור לשים קלף צהוב או ירוק. מצאי נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל a_n.

4) מצא יחס רקורסיבי ותנאי התחלה עבור מספר המילים באורך n מעל $\{A,B,C\}$ ללא הרצפים הבאים. (כל סעיף שאלה בפני עצמה)
א) CC ב) AB ג) AA,AB ד) AA,BA ה) AA,AB,AC ו) AB,BC באתר מצורף פתרון בשתי דרכים ז) BA,CA ח) AA,BB ט) AA,BB,CC י) BC,CB

5) מצא יחס רקורסיבי ותנאי התחלה עבור מספר הדרכים לרצף שביל באורך n במרצפות אדומות באורך 2, מרצפות צהובות באורך 2 מרצפות ירוקות באורך 2, ומרצפות שחורות ומרצפות לבנות באורך 1 כל אחת. ולאחר פתור את יחס הנסיגה שקיבלת, קבל נוסחה מפורשת, וחשב את ארבעת האיברים הראשונים בשתי דרכים. אחת לפי היחס הרקורסיבי ושתים ע"י הצבה בנוסחה המפורשת שמצאת.

6) עבור n טבעי מהו מספר הסדרות הפלינדרומיות באורך n מעל קבוצת הספרות העשרוניות $\{0,1,2,...,9\}$ (סידרה $x_1,...,x_n$ היא פלינדרומית אם $x_i = x_{n-i+1}$ לכל $1 \le i \le n$ ובעברית יותר קלה אם בקריאתה מהסוף להתחלה או מההתחלה לסוף מתקבלת אותה סדרה למשל כמו $\mathbf{1,7,2,2,2,7,1}$).

7) נתבונן בסדרות סופיות של סימנים, הלקוחים מתוך 6 סימנים אלה: הספרות $0,1$ וארבעה סימני פעולה: $+\,,\,-\,,\,*\,,\,/$.
ובכפוף לתנאים הבאים:

א. הסדרה נפתחת ומסתיימת בספרה.

ב. אין הופעות צמודות של סימני פעולה.

דוגמאות של סדרות העונות על התנאים: $0100/101-11+1010$, $\mathbf{001}$.

דוגמאות של סדרות **שאינן** עונות על התנאים: -00 , $+00+10$, $101+/00$.

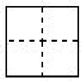
נסמן ב-a_n את מספר הסדרות הללו שבהן בדיוק n סימנים.

א) מצא יחס נסיגה עבור a_n.

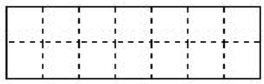
ב) מצא אופן ישיר את a_0, a_1, a_2, a_3. בדוק בעזרת הערכים שקיבלת את יחס הנסיגה שרשמת.

ג) פתור את יחס הנסיגה וקבל נוסחה מפורשת עבור a_n. ובדוק בעזרת הנוסחה הנ"ל את תוצאות סעיף ב'.

8) בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 1×2:

ומספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×2  :

עלינו לרצף מלבן שממדיו $n\times 2$:
(בציור $n=7$).



אסור לחרוג מגבולות המלבן. בלוק של 1×2 אפשר להניח כרצוננו "שוכב" או "עומד".
יהי a_n מספר הריצופים השונים האפשריים.

א. רשום יחס נסיגה עבור a_n (הסבר אותו) ותנאי התחלה מספיקים.

ב. פתור את יחס הנסיגה.

ג. חשב את a_4 בשתי דרכים: מתוך יחס הנסיגה שבסעיף א'

9) תנו ביטוי מפורש ל-a_n בנוסחאות הנסיגה הבאות וחשבו את $a_3\,,\,a_4\,,\,a_5$ בשתי דרכים, אחת בעזרת יחס הנסיגה ושתיים בעזרת הנוסחה המפורשת.

א) $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$ כאשר $a_0=3\,,\,a_1=7$

ב) $a_{n+1}=5a_n-4a_{n-1}$ כאשר $a_0=1\,,\,a_1=1$

ג) $a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}$ כאשר $a_0=-1\,,\,a_1=4$

ד) $a_{n+1}=7a_{n-1}+6a_{n-2}$ כאשר $a_0=1\,,\,a_1=0\,,\,a_2=7$

ה) $a_{n+1}=4a_n-5a_{n-1}+2a_{n-2}$ כאשר $a_0=1\,,\,a_1=4\,,\,a_2=11$

ו) $a_n=7a_{n-1}-10a_{n-2}+16n$ כאשר $a_1=19\,,\,a_0=14$

ז) $a_n=6a_{n-1}-8a_{n-2}-3$ כאשר $a_0=1\,,\;a_1=9$

ח) $a_n=6a_{n-1}-8a_{n-2}-3^n$ כאשר $a_0=1\,,\;a_1=9$

ט) $a_n=6a_{n-1}-8a_{n-2}-2^n$ כאשר $a_0=1\,,\;a_1=10$

י) $a_n=10a_{n-1}-25a_{n-2}+5^n$ כאשר $a_0=-1\,,\,a_1=7\tfrac{1}{2}$

יא) $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}+2^n+n$ כאשר $a_0=1\,,\,a_1=2$

10) מצא נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור הסידרה a_n המקיימת: $a_n = 2^{2n+1} - 3^n(n-1)+1$.

11) כתוב נוסחת נסיגה , a_n , למספר הסדרות באורך n בספרות 0,1,2 ללא 00 ו-12.

12) איש ציבור נורמטיבי לוקח שוחד כל שנה בסכום 2 מיליון דולר,4 מיליון דולר או 6 מיליון דולר. כדי לא למשוך תשומת לב הוא לא לוקח שנתיים ברצף שוחד על סך 6 מיליון דולר. נסמן ב a_n את מספר סדרות השוחד השונות שיכול לצבור איש ציבור בשירות נורמטיבי בן n שנים.

דוגמה: במשך 4 שנים ניתן לצבור את סדרת השוחד 2,2,2,2; את סדרת השוחד 2,4,2,6; את סדרת השוחד 4,2,2,6; ועוד כהנה וכהנה. שימי לב ששתי הסדרות האחרונות נספרות כשתי סדרות שוחד שונות.

רשמי נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל a_n.

13) לכל $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ נסמן ע"י $\boldsymbol{a_n}$ את מספר המילים מעל $\{\boldsymbol{A,B,C,D,E}\}$ שלא מכילות אף אחד מהרצפים $\boldsymbol{AA,BA,CA}$

מצא נוסחה מפורשת עבור $\boldsymbol{a_n}$.

14) יהי a_n מספר הסדרות באורך n , שאבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2,3\ldots,8\}$ ומקיימות את התנאי

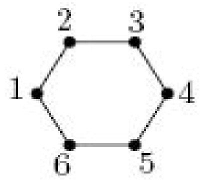
הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים זוגיים זה בסמוך לזה.

א) מצאו יחס נסיגה עבור a_n, רשמו את $a_0, \quad a_1$.

ב) פתרו את יחס הנסיגה וקבלו ביטוי מפורש עבור a_n.

ג) חשבו את a_2 מנוסחת הרקורסיה ומהביטוי המפורש, ובדקו שהתקבל אותו ערך.

15) לקינוח שאלה קשה.



כמה טיולים באורך $\boldsymbol{n}$ המתחילים בקודקוד 1 ומסתיימים בקודקוד 1 יש בגרף

לדוגמה עבור $\boldsymbol{n=2}$ יש שני טיולים כאלה והם $\boldsymbol{1,2,1}$ ו- $\boldsymbol{1,6,1}$

לדוגמה עבור $\boldsymbol{n=4}$ יש שישה טיולים כאלה והם

$\boldsymbol{(1,2,1,6,1),(1,6,1,2,1),(1,6,1,6,1),(1,6,5,6,1),(1,2,1,2,1).(1,2,3,2,1)}$

תרגילים בנושא שובך היונים

1) תהי $A=\{1,2,3,\cdots,49\}$ הוכח כי לכל בחירה של קבוצה $B\subseteq A$ כך ש- $|B|=26$ יהיו ב- B לפחות שני איברים שסכומם 49.

2) תהי A קבוצה של שישה מספרים מתוך $\{1,\ldots 11\}$ הוכח כי קיימות שתי תתי קבוצות של A שסכום אבריהן שווה.

3) מה הגודל המירבי של קבוצה של מספרים טבעיים שבה אין שני מספרים שסכומם או הפרשם מתחלק ב-3009? נמקו!!!

4) תהי A קבוצה של n מספרים טבעיים כלשהם. הוכח שקיימת קבוצה חלקית לא-ריקה של A, **שסכום** איבריה מתחלק ב- n

5) הוכח כי בכל צביעה של המישור בשני צבעים כחול ואדום יש שתי נקודות שמרחקן, אחד והן צבועות באותו צבע.

6) יהי $n\in\mathbb{N}$ הוכח כי קיים $k\in\mathbb{N}$ כך שבמספר הטבעי $k\cdot n$ מופיעות הספרות **7** ו-**0** בלבד.

7) הוכח כי מבין כל 12 מספרים דו ספרתיים יש שניים שהפרשם בעל שתי ספרות זהות.

8) הוכח כי מבין כל בחירת 26 נקודות בתוך משולש שווה צלעות שאורך צלעו הוא אחד יש שתי נקודות שהמרחק בינהן קטן מ- $\frac{1}{5}$.

9) הוכח כי בכל בחירה של $n+1$ מספרים מתוך הקבוצה $\{1,2,3,\cdots,2n\}$ יש שני מספרים x,y כך ש-

א. x,y זרים. (כלומר המחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1.)

ב. x מתחלק ב- y ללא שארית.

ג. הראה כי החסם הנ"ל הדוק, כלומר אפשר לבחור n מספרים מבלי שיתקיימו תנאי א' ו-ב'.

10) בוחרים **46** מספרים מתוך הקבוצה $\{1,2,3,\cdots,81\}$ הוכח כי יש שני מספרים שהפרשם הוא בדיוק 9.)

הוכח גם כי המספר הנ"ל הדוק. (כלומר מצא 45 מספרים מתוך $\{1,2,3,\cdots,81\}$ שאין בהם שניים שהפרשם הוא בדיוק 9.)

11) תהי A קבוצה בת 20 מספרים שנבחרו במתוך הסדרה החשבונית $1,4,7,10,\cdots,100$ הוכח כי יש שני מספרים שסכומם 104.

12) n אנשים נפגשו במסיבה ולחצו ידיים. הוכח כי יש שני אנשים שלחצו בדיוק אותו מספר ידיים.

13) הוכח כי בכל צביעה של קשתות הגרף השלם K_6 בשני צבעים יש משולש מונוכרומטי.

14) הוכח כי בכל גרף יש שני קודקודים בעלי אותה דרגה.

15) לפוליטיקאי נותרו 50 ימים עד לבחירות. הוא מתכנן נאומי בחירות. לפחות אח ביום אך לא יותר מ-75 נאומים בס"ה. הוכח כי קיימת סדרת ימים שבהם הוא נואם בס"ה 24 מאומים.

16) יהי $n\in\mathbb{N}$ הוכח כי קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש- n מחלק את 2^m-1. הדרכה: התבונן ב- $2^1-1,2^2-1,2^3-1,\cdots 2^{n+1}-1$.